方向特性についての基礎的考察

池田, 恵

方向特性についての基礎的考察

東理大・理工　池田　恵

（12月4日受理）

1. はじめに

我々が，従来から考えてきている内部自由度のうち，[1]その代表的なものは方向特性である。それについての基礎的考察は，最近の非局所連続体力学[2]に本質的なモデルを提供するという，純理論力学的問題にかかわると同時に，例えば，液晶における連続体モデルによる取扱いなどにみられるごとく，[5) 6)]実際面の応用に於ても，かかり重要な要因となってきていることは事実である。

そこで，この論文では，前論文[1]でのべたところに対する，一つの具体例という意味をもたせながら，方向特性の物理幾何学的把握について述べてみたい。

既にのべた如く，物性問題の連続体力学的取扱いは，それ自身，かなり巨視的な，平均的様相を記述していることは確かであるが，その反面，より微視的に洞察するために，新しい内部自由度を導入して，点自身の構造を反映させながら，力学体系自体の拡張を図ることが考えられてきている。（その一連の体系を非局所連続体力学というのである。）ここでいう方向特性とは，各点のもつ固有の方向の抽象で，誘電分極，磁化，スピン，分子軸，内部回転ベクトル，等に相当しており，従って，我々としては，「各点が方向をもつ」という類いの非局所化を考えていくことになる。

2. 方向特性について

さて，では，我々の物理幾何学的考察に於ては，方向特性はどの様にとらえられるのか，について考えていこう。

今，各点を座標（x^{κ}）（$\kappa=1,2,3$）で表わすことにし，各点に付随する方向特性を表わすためのベクトルを（p^{σ}）（$\sigma=1,2,3$）とおく。但し，系（κ）は，変形状態の連続体多様体の座標系とするから，（κ）- 空間自体は非ユークリッド的である。一方，（σ）- 空間は，純物理場を意味し，方向特性の構成する場であるが，我々の連続体モデルでは，方向特性の効果は，結局，

変形場の特徴として表面に出現してくると考えられるから，以下のべる様に，(p^{σ}) の効果としての相互作用は，(κ)－場に写影され，その意味で縮退化させられる。

かくして，独立変数としては (x^{κ}, p^{σ}) なる elements of support が採用されることになり，体系としては，明らかに，一種のフィンスラー空間的様相を呈することとなる。[1] そこで，我々としては，(x^{κ}, p^{σ}) に基づくフィンスラー空間によって，方向特性を記述していけば良いことになるが，通常の連続体モデルでの扱いにみられるごとく，[5) 6)] (p^{σ}) については，その方向のみが問題であって，大きさは問題にならないということがあるので，ここでも，(p^{σ}) のかわりに，その方向の単位ベクトル (ℓ^{σ}) を用いた議論に切り換えることを考える。方向に関する，この条件は，実は，フィンスラー空間に於ても，初めから仮定されるので，この点でも，(x^{κ}, ℓ^{σ}) に基づくフィンスラー空間による方が，体系的には，ぴったりなのである。

さて，フィンスラー空間についての詳細は，独立な文献 3)，4) を参照してもらうことにして，我々は，以下では，正に，(x^{κ}, ℓ^{σ}) に基づいている，E.Cartan[3] のフィンスラー空間を用いたい。我々の扱う方向性物体は，連続体多様体としては，数学的には，極く素直な性質のものであり，ただ，方向特性という新自由度を抽出して扱うことが目新しく，しかも，変形場を基本にする以上，接続関係が，物理的条件からも一意的に決定される様なものであると考えられる。その点，Cartan のユークリッド接続に基づくフィンスラー空間論は，その様な我々の立場からみて適当であり，かつ，物理的条件と合致しているところ多であろうと思われる。

以下，諸条件を列挙し，その物理的意味を考えていこう。

3.　フィンスラー空間による考察

まず，計量 $g_{\sigma\rho}(x, p)$ が与えられ，基本函数 (fundamental function) $F(x, p)$ が，

$$F^2(x, p) = g_{\sigma\rho}(x, p)\, p^{\sigma}\, p^{\rho} \tag{3.1}$$

で与えられるものとする。つまり，F^2 は，p^{σ} の大きさの二乗であり，$g_{\sigma\rho}$

は，p^σ を何にとるかによって決ってくるところの物質係数である。

次に，接続は，まず最初は (x, p) を基本にした形，

$$DV^\sigma = dV^\sigma + \Gamma^{\sigma}_{\mu\rho} V^\rho dx^\mu + C^{\sigma}_{\tau\rho} V^\rho dp^\tau \tag{3.2}$$

で導入されているとする。但し，接続係数 $\Gamma^{\sigma}_{\mu\rho}$ と $C^{\sigma}_{\tau\rho}$ は，共に (x, p) の函数とする。ここに於て，平行移動によって長さは変らないという計量条件，

$$\left.\begin{aligned} &D g_{\sigma\rho} = 0, \\ &\text{あるいは，} \\ &d g_{\sigma\rho} = (\Gamma^{\tau}_{\mu\sigma} g_{\tau\rho} + \Gamma^{\tau}_{\mu\rho} g_{\sigma\tau})\, dx^\mu \\ &\qquad + (C^{\tau}_{\phi\sigma} g_{\tau\rho} + C^{\tau}_{\phi\rho} g_{\sigma\tau})\, dp^\phi, \end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

が成立っているとする。(3.3) は，又，

$$\left.\begin{aligned} &\partial_\mu g_{\sigma\rho} = \Gamma^{\phi}_{\mu\sigma} g_{\phi\rho} + \Gamma^{\phi}_{\mu\rho} g_{\sigma\phi} \ ; \ \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \\ &\partial_\tau g_{\sigma\rho} = C^{\phi}_{\tau\sigma} g_{\phi\rho} + C^{\phi}_{\tau\rho} g_{\sigma\phi} \ ; \ \partial_\tau = \frac{\partial}{\partial p^\tau}, \end{aligned}\right\} \tag{3.4}$$

と書きなおせる。通常の座標変換則を試みればわかる如く，$\Gamma^{\sigma}_{\mu\rho}$ は，通常の接続係数と同等であるが，$C^{\phi}_{\tau\sigma}$ はテンソルであることがわかり，[3) 4) 7)] しかも，Cartan[3)] に従って，$C_{\tau\sigma\rho} = C_{\tau\rho\sigma}$（但し，$C_{\tau\sigma\rho} \equiv C^{\phi}_{\tau\sigma} g_{\phi\rho}$）と仮定すれば，$(3.4)_2$ によって，

$$C_{\tau\sigma\rho} = \frac{1}{2} \partial_\tau g_{\sigma\rho} \tag{3.5}$$

と，一意的に決定されることになる。これは，純 (σ)－場の量 $C_{\tau\sigma\rho}$ が，(κ)－場との相互作用を明示的に考慮に入れなくても，(σ)－場の内部だけで決定されることを意味する。又，(3.1) に於て，$g_{\sigma\rho}$ は p^σ について，0次正斉次とするから（最初から，$F(x, p)$ を p に関して，一次正斉次と仮定する故），$C_{\tau\sigma\rho}$ は p^σ について (−1) 次正斉次となり，従って，

$$C_{\tau\sigma\rho}\, p^\sigma = C_{\tau\sigma\rho}\, p^\rho = 0 \tag{3.6}$$

なる，付帯条件が考えられる。

そこで，次には p^σ のかわりに，単位ベクトル

$$\left.\begin{aligned} &\ell^\sigma = \frac{p^\sigma}{F} \ ; \quad g_{\sigma\rho}\,\ell^\sigma\,\ell^\rho = 1 \\ &(\text{共変成分は } \ell_\sigma = \partial_\sigma F = g_{\sigma\rho}\,\ell^\rho) \end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

を用いることを考えよう。

一般に，(3.2) において，$V^\sigma = \ell^\sigma$ とおくと，(3.6) より $C_{\tau\sigma\rho}\,\ell^\sigma = C_{\tau\sigma\rho}\,\ell^\rho = 0$ 故に，ℓ^σ についての共変微分が

$$D\,\ell^\sigma = d\,\ell^\sigma + \Gamma^\sigma_{\mu\rho}\,\ell^\rho\,dx^\mu \tag{3.8}$$

で与えられる。一方，(3.7) より

$$d\,\ell^\sigma = \frac{F(dp^\sigma) - p^\sigma(dF)}{F^2} \tag{3.9}$$

故に，(3.8) と (3.9) より $d\,\ell^\sigma$ を消去すれば，

$$dp^\sigma = F(D\ell^\sigma) + p^\sigma\left(\frac{dF}{F}\right) - \Gamma^\sigma_{\mu\rho}\,p^\rho\,dx^\mu \tag{3.10}$$

が得られるので，これを (3.2) に代入してやると，

$$\left.\begin{aligned} &DV^\sigma = dV^\sigma + A^\sigma_{\tau\rho}\,V^\rho(D\ell^\tau) + \overset{*}{\Gamma}{}^\sigma_{\mu\rho}\,V^\rho\,dx^\mu \\ &\text{但し}\begin{cases} A^\sigma_{\tau\rho} \equiv F\,C^\sigma_{\tau\rho}\ , \\ \overset{*}{\Gamma}{}^\sigma_{\mu\rho} \equiv \Gamma^\sigma_{\mu\rho} - C^\sigma_{\tau\rho}\,\Gamma^\tau_{\mu\phi}\,p^\phi\ , \end{cases} \end{aligned}\right\} \tag{3.11}$$

が得られる。この (3.11) は，$(D\ell^\tau)$ なる，我々のことばでいうところの基接続[1] によって表わされた，接続関係を与え，その際，登場してきている $\overset{*}{\Gamma}{}^\sigma_{\mu\rho}$ なる接続係数が，$p^\sigma(\ell^\sigma)$ からの効果を全て含んだ相互作用係数である。(Cartan[3] では，$\overset{*}{\Gamma}{}^\sigma_{\mu\rho} = \overset{*}{\Gamma}{}^\sigma_{\rho\mu}$ が仮定されている。)

ここで，ついでに述べておくと，ℓ^σ は各点の方向特性を表示する単位ベク

トルであるが，それ自身は，その点の固有方向を向いていると考えられるので，各点ごとに，ℓ^{σ} は互いに“平行”であるといえる。つまり，ℓ^{σ} に関する固有条件は，$D\ell^{\sigma}=0$ に他ならないといえ，それは，(3.8) より，

$$d\,\ell^{\sigma}+\Gamma_{\mu\rho}^{\ \ \sigma}\,\ell^{\rho}\,dx^{\mu}=0 \tag{3.12}$$

であり，従って，これより，通常，表面に出現すべき，ℓ^{σ} の位置的変化 ― 液晶理論では，曲率歪（curvature-strain）と呼ばれている量 ― が，

$$\kappa_{\mu}^{\ \sigma}=\frac{d\,\ell^{\sigma}}{dx^{\mu}}=-\Gamma_{\mu\rho}^{\ \ \sigma}\,\ell^{\rho} \tag{3.13}$$

で与えられることになる。(3.11) の $\overset{*}{\Gamma}{}_{\mu\rho}^{\ \ \sigma}$ の定義からわかる如く，$\overset{*}{\Gamma}{}_{\mu\rho}^{\ \ \sigma}\,\ell^{\rho}=\Gamma_{\mu\rho}^{\ \ \sigma}\,\ell^{\rho}$（$C_{\tau\rho}^{\ \ \sigma}\,\ell^{\rho}=0$ だから）が成立つ故，

$$\kappa_{\mu}^{\ \sigma}=-\overset{*}{\Gamma}{}_{\mu\rho}^{\ \ \sigma}\,\ell^{\rho} \tag{3.14}$$

とも書け，全体系から見た時の $\kappa_{\mu}^{\ \sigma}$ の幾何学的対応が明らかとなった。(3.14) は，(3.11) において，($V^{\sigma}=\ell^{\sigma}$, $DV^{\tau}=0$) とおいたものからも得られる。実は，この $\kappa_{\mu}^{\ \sigma}$ は，接続の order 故，純幾何学的には“曲率”ではありえず，むしろ，“捩率”に匹敵すべき量であることがわかる。

以上述べたところより，固有方向特性条件（$D\ell^{\sigma}=0$）が満足されている時は，全体系の接続関係は，(3.11) から

$$DV^{\sigma}=d\,V^{\sigma}+\overset{*}{\Gamma}{}_{\mu\rho}^{\ \ \sigma}\,V^{\rho}\,dx^{\mu} \tag{3.15}$$

へ縮退してしまうことがわかり，これより，共変微分商は，

$$V^{\sigma}_{\ |\mu}\equiv\partial_{\mu}V^{\sigma}-\frac{\partial V^{\sigma}}{\partial p^{\rho}}\,\Gamma_{\mu\tau}^{\ \ \rho}\,p^{\tau}+\overset{*}{\Gamma}{}_{\mu\rho}^{\ \ \sigma}\,V^{\rho} \tag{3.16}$$

に帰着することとなった。この時，$(3.4)_1$ の計量条件は，

$$\partial_{\mu}\,g_{\sigma\rho}=\overset{*}{\Gamma}_{\mu\sigma\rho}+\overset{*}{\Gamma}_{\mu\rho\sigma}+2\,C_{\tau\sigma\rho}\,\overset{*}{\Gamma}{}_{\mu\phi}^{\ \ \tau}\,p^{\phi} \tag{3.17}$$

とかきなおされ，これによって $\overset{*}{\Gamma}_{\mu\sigma\rho}$ は

$$\overset{*}{\Gamma}_{\mu\sigma\rho} = \gamma_{\mu\sigma\rho} - c_{\phi\sigma\rho}\,\Gamma^{\phi}_{\mu\psi}\,p^{\psi} - c_{\phi\sigma\mu}\,\Gamma^{\phi}_{\rho\psi}\,p^{\psi} + c_{\phi\mu\rho}\,\Gamma^{\phi}_{\sigma\psi}\,p^{\psi},$$

$$\text{但し，}\quad \gamma_{\mu\sigma\rho} \equiv \frac{1}{2}\left(\partial_{\mu} g_{\sigma\rho} + \partial_{\sigma} g_{\rho\mu} - \partial_{\rho} g_{\mu\sigma}\right) \qquad (3.18)$$

で与えられることになる。[3) 4)] 但し，(3.18) での指標は，(κ) と (σ) とで区別がない形で計算するものとする。そして，この時は，元の接続係数が，

$$\Gamma_{\mu\sigma\rho} = \gamma_{\mu\sigma\rho} - c_{\phi\sigma\rho}\,\Gamma^{\phi}_{\mu\psi}\,p^{\psi} + c_{\phi\mu\rho}\,\Gamma^{\phi}_{\sigma\psi}\,p^{\psi} \qquad (3.19)$$

で与えられることとなり，(3.5) と相俟って，接続と計量の関係が決定されることになる。

かくして，方向特性の介在を考慮に入れた連続体力学体系が，フィンスラー空間によって記述されることになり，付随条件 $D\ell^{\sigma} = 0$ ($g_{\sigma\rho}\,\ell^{\sigma}\,\ell^{\rho} = 1$) と共に，構造的には ($g_{\sigma\rho}$, $\overset{*}{\Gamma}{}^{\sigma}_{\mu\rho}$) によって把握されることとなった。

この様に構造が決定されることを考えあわせると，(3.13)，(3.14) の物理量から $\overset{*}{\Gamma}{}^{\sigma}_{\mu\rho}$，$\Gamma^{\sigma}_{\mu\rho}$ を求めた後に，$g_{\sigma\rho}$ を求めるという手続きと，それとは別に，$g_{\sigma\rho}$，$\Gamma^{\sigma}_{\mu\rho}$ を適当な函数型に仮定しておいて，(3.13)，(3.14) の物理条件に代入してやって，その仮定した量を求めるという類の考察が可能となり，液晶などでは，前者の考え方が行なわれている様である。[5)]

4. 変形場との関係

従来，我々は物理的相互作用場の構造を考えるに当っては，次の様に考えてきた。[1) 8)] 即ち，まず，純変形場が基底場として存在し，それに重なる様に純物理場が作用して，その結果出現する相互作用のために，着目する変形場が，元の純変形場から“はみだす”ことをもって，相互作用場の出現とみなしてきた。従って，相互作用場の構造は，とりもなおさず，その“はみだし”の構造であり，その本質的要因を，(x^{κ}, $\lambda^{\sigma}_{\kappa}$) なる elements of support に基づくところの非ホロノーム部分空間分解論によって調べてきた。その理論との比較検討によって，前節までの考察は次の様に変形場と関係づけられる。

まず，計量であるが，$g_{\sigma\rho}$ は，今の場合，p^{σ} に見合うための純物理場での物質係数に相当しており，これが変形場へ写影される場合には，

$$g_{\lambda\kappa} = \lambda^{\sigma}_{\lambda}\, \lambda^{\rho}_{\kappa}\, g_{\sigma\rho}\ ,\quad \text{あるいは}\quad g_{\sigma\rho} = \lambda^{\lambda}_{\sigma}\, \lambda^{\kappa}_{\rho}\, g_{\lambda\kappa} \tag{4.1}$$

の形の，(κ)－と(σ)－場との間の変換を考えなければならない。ここに，$\lambda^{\sigma}_{\kappa}$は相互作用係数である。例えば，$p^{\sigma}$が誘電分極ベクトルの時，$g_{\sigma\rho}$が誘電率とすると，良く知られている様に，$g_{\sigma\rho}$は$p^{\sigma}$にも，歪にも依存する故，$g_{\lambda\kappa}$を歪の order の量とみなせば，$m^{\cdot\cdot\sigma\rho}_{\lambda\kappa} = \lambda^{\sigma}_{\lambda}\lambda^{\rho}_{\kappa}$自体が，一つの全相互作用係数を表わすことになる。その様な一連の写影関係が，(κ)－と(σ)－場の間に，ことごとく想定できて，$\lambda^{\sigma}_{\kappa}$，及びそれの組合わせが，変形場での物理的実体としての意味をもつに至る。

次に，接続係数$\overset{*}{\Gamma}{}^{\sigma}_{\mu\rho}$についてであるが，これを構成する$\Gamma^{\sigma}_{\mu\rho}$と$C^{\sigma}_{\tau\rho}$について考えなければならない。後者は，一応，(3.5)によって$g_{\sigma\rho}$から一意的に決定されるものと考えられ，これは純物理係数のp^{τ}による変化故，前例でいえば，誘電率の分極への依存性を表わす係数である。従って，問題は$\Gamma^{\sigma}_{\mu\rho}$の方であるが，(4.1)に相当した変換としては，$(\kappa)$－場からの“はみだし”を強調する意味で，

$$\Gamma^{\sigma}_{\mu\rho} = \lambda^{\sigma}_{\kappa}\, \lambda^{\lambda}_{\rho}\, \Gamma^{\kappa}_{\mu\lambda} + \lambda^{\sigma}_{\kappa}\, \partial_{\mu}\, \lambda^{\kappa}_{\rho} \tag{4.2}$$

が考えられる。これは，通常の接続係数に関する座標変換則を，$\Gamma^{\sigma}_{\mu\rho}$と$\Gamma^{\kappa}_{\mu\lambda}$との間に適用したものである。そして，$\Gamma^{\kappa}_{\mu\lambda}$は，純変形によって構成される$(\kappa)$－場自体の接続係数とするから，これは，例えば，外部変形によって決定される量と考えてさしつかえない。ところが，通常の方向特性の扱いにみられる如く，[5),6)] 単に，方向特性ベクトルの様相のみに着目する立場，即ち，純変形場は既定のものとして扱って，“はみだし”のみに着目する立場では，(4.2)において，

$$\Gamma^{\sigma}_{\mu\rho} = \lambda^{\sigma}_{\kappa}\, \partial_{\mu}\, \lambda^{\kappa}_{\rho} \tag{4.3}$$

とおくことになる。ということは，相互作用場の構造として，最初から遠隔平行性を仮定することと同等であり，$\Gamma^{\sigma}_{\mu\rho}$に基づく曲率は出現しないことになる。

(4.3)を仮定すれば，$\overset{*}{\Gamma}{}^{\sigma}_{\mu\rho}$は，

$$\left.\begin{aligned}&\overset{*}{\Gamma}{}^{\sigma}_{\mu\rho}=(\lambda^{\tau}_{\kappa}\partial_{\mu}\lambda^{\kappa}_{\phi})\{\delta^{\sigma}_{\tau}\delta^{\phi}_{\rho}-\frac{1}{2}g^{\sigma\psi}(\partial_{\tau}g_{\rho\psi})p^{\phi}\},\\&\text{あるいは}\\&\overset{*}{\Gamma}_{\mu\rho\sigma}=(\lambda^{\tau}_{\kappa\circ}\partial_{\mu}\lambda^{\kappa}_{\phi})\{\delta_{\tau\sigma}\delta^{\phi}_{\rho}-\frac{1}{2}(\partial_{\tau}g_{\rho\sigma})p^{\phi}\}\end{aligned}\right\}\quad(4.4)$$

で与えられることになる。

この様にして，（4.1）と（4.4）を介して，相互作用場の構造が変形場と結びついて来，場合に応じて，$(\lambda^{\sigma}_{\kappa})$ を適当に仮定してやれば，変形場からの"はみだし"をとらえることができ，それが，例えば，（3.14）などによって，物理的に決定されることになる。

例えば，今，最も簡単に，

$$\left.\begin{aligned}&\lambda^{\sigma}_{\kappa}=\delta^{\sigma}_{\kappa}+\Lambda^{\sigma}_{\kappa}(x,p),\\&\text{あるいは，}\\&\lambda^{\lambda}_{\rho}=\delta^{\lambda}_{\rho}-\Lambda^{\lambda}_{\rho}(x,p),\end{aligned}\right\}\quad(4.5)$$

とおくことにすると，Λ についての高次項を省略すれば，

$$\left.\begin{aligned}&g_{\lambda\kappa}=\delta_{\lambda\kappa}+2\Lambda_{(\lambda\kappa)}\ ;\quad \Lambda_{\lambda\kappa}\equiv\Lambda^{\sigma}_{\lambda}\delta^{\rho}_{\lambda}g_{\sigma\rho},\\&\Gamma^{\sigma}_{\mu\rho}=\partial_{\mu}\Lambda^{\cdot\sigma}_{\rho}\ ;\quad \Lambda^{\cdot\sigma}_{\rho}\equiv\Lambda^{\kappa}_{\rho}\delta^{\sigma}_{\kappa},\end{aligned}\right\}\quad(4.6)$$

及び

$$g_{\sigma\rho}=\delta_{\sigma\rho}-2\Lambda_{(\sigma\rho)}\ ;\quad \Lambda_{\sigma\rho}=\Lambda^{\lambda}_{\sigma}\delta^{\kappa}_{\rho}g_{\lambda\kappa}\qquad(4.7)$$

を得る。つまり，Λなる量が純粋の"はみだし"を表わすものとする。更に，p^{σ} からの寄与を明示的に把握するために，Λ を p^{σ} で展開して，

$$\left.\begin{aligned}&\Lambda^{\sigma}_{\kappa}=a^{\sigma}_{\kappa}(x)+b^{\sigma}_{\kappa\rho}(x)\,p^{\rho}+\cdots\cdots,\\&\text{あるいは，}\\&\Lambda^{\lambda}_{\rho}=a^{\lambda}_{\rho}(x)-b^{\lambda}_{\rho\phi}(x)\,p^{\phi}-\cdots\cdots,\end{aligned}\right\}\quad(4.8)$$

とおくことにする。但し，以下では簡単のために，p^{σ} の一次の項までしか考

慮に入れないものとする。そうすると，この時，（4.6），（4.7）は，

$$\left.\begin{array}{ll} g_{\lambda\kappa}=\delta_{\lambda\kappa}+2a_{(\lambda\kappa)}+2b_{(\lambda\kappa)\rho}P^{\rho}; & \left(\begin{array}{l} a_{\lambda\kappa}\equiv a^{\sigma}_{\lambda}\delta^{\rho}_{\kappa}g_{\sigma\rho}, \\ b_{\lambda\kappa\rho}\equiv b^{\sigma}_{\lambda\rho}\delta^{\phi}_{\kappa}g_{\sigma\phi}. \end{array}\right. \\ \Gamma^{\sigma}_{\mu\rho}=\partial_{\mu}a^{\cdot\sigma}_{\rho}-(\partial_{\mu}b^{\cdot\sigma}_{\rho\cdot\phi})P^{\phi}; & \left(\begin{array}{l} a^{\cdot\sigma}_{\rho}\equiv a^{\lambda}_{\rho}\delta^{\sigma}_{\lambda}, \\ b^{\cdot\sigma}_{\rho\cdot\phi}\equiv b^{\lambda}_{\rho\phi}\delta^{\sigma}_{\lambda}, \end{array}\right. \end{array}\right\} \quad (4.9)$$

及び

$$\left. g_{\sigma\rho}=\delta_{\sigma\rho}-2a_{(\sigma\rho)}+2b_{(\sigma\rho)\phi}P^{\phi}; \left(\begin{array}{l} a_{\sigma\rho}\equiv a^{\lambda}_{\sigma}\delta^{\kappa}_{\rho}g_{\lambda\kappa}, \\ b_{\sigma\rho\phi}\equiv b^{\lambda}_{\sigma\phi}\delta^{\kappa}_{\rho}g_{\lambda\kappa}, \end{array}\right. \right\} \quad (4.10)$$

とかける。$g_{\lambda\kappa}$ においては，（$\delta_{\lambda\kappa}+2a_{(\lambda\kappa)}$）が，いわば純変形量を表わし，（$2b_{(\lambda\kappa)\rho}P^{\rho}$）が P^{ρ} からの寄与を表わし，$b_{(\lambda\kappa)\rho}$ が，ピエゾ電気効果，磁歪など，一般の物質係数である。$g_{\sigma\rho}$ においては，（$\delta_{\sigma\rho}-2a_{(\sigma\rho)}$）が，いわば純変形からの寄与（例えば，$m^{\cdot\cdot\lambda\kappa}_{\sigma\rho}a_{(\lambda\kappa)}$ の形での寄与）を表わし，（$2b_{(\sigma\rho)\phi}P^{\phi}$）が P^{ϕ} からの寄与を表わし，全体として，一つの物理係数を表わす。$\Gamma^{\sigma}_{\mu\rho}$ についても，同様の分解ができている。又，この時，$c_{\tau\sigma\rho}$ は，（4.10）から $c_{\tau\sigma\rho}=b_{(\sigma\rho)\tau}$ に帰着し，これ自身が一つの相互作用係数となっていることは，既にのべたとおりである。

さて，以上の様な仮定をおくと，相互作用場全体の接続の構造は，

$$\overset{*}{\Gamma}{}^{\sigma}_{\mu\rho}=A^{\sigma}_{\mu\rho}(x)-B^{\sigma}_{\mu\rho\phi}(x)\,P^{\phi} \quad (4.11)$$

の形にまとめられ，全体構造としての物理条件との対応関係から，これらの展開係数を求めることができる。そして，（4.11）の $\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$ は，それぞれ，

$$\left.\begin{array}{l} A^{\sigma}_{\mu\rho}\equiv\partial_{\mu}a^{\cdot\sigma}_{\rho}, \\ B^{\sigma}_{\mu\rho\phi}\equiv\partial_{\mu}b^{\sigma}_{\rho\phi}+(\partial_{\mu}a^{\cdot\tau}_{\phi})b^{\rho}_{\tau\rho} \end{array}\right\} \quad (4.12)$$

によって，$\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$ と結ばれている故，これより，$\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$ が求まれば，相互作用

係数 λ の構造が決定されることになる。

かくして，$(g_{\sigma\rho},\ \overset{*}{\Gamma}{}^{\sigma}_{\mu\rho})$ から $(g_{\lambda\kappa},\ \overset{*}{\Gamma}{}^{\sigma}_{\mu\rho})$ への転換が可能となり，而して，“はみだし”の概念に基づいた相互作用場の構造が，変形論的に考察されることとなる。[2)]

5. 結　び

我々の連続体力学基礎論的考察においては，方向特性の反映は，相互作用場の構造の中にくみこまれ，相互作用係数 $(\lambda^{\sigma}_{\kappa})$ による，(κ)-場からの“はみだし”として把握されることとなった。従って，我々が従来から展開してきているところの，非ホロノーム部分空間分解論の概念に基づけば良いことになった。$(\lambda^{\sigma}_{\kappa})$ の函数型は，ここでは便宜的に，方向特性ベクトル (P^{σ}) による展開を仮定したが，それは P^{σ} の取り方と $g_{\sigma\rho}$ の規定の仕方に依存して適当に仮定されるものである。又，逆にいえば，その仮定された函数型は，観測にかかる物理的条件まで遡ることにより，展開係数等が決定されることにもなる。その事は，実際に，液晶問題などで試みたいと思っている。

6. 参考文献

1)　池田　恵，物性研究，<u>14</u>－6 (1970)，419．
2)　S. Ikeda, Scientific Papers of the RIPAM, <u>1</u>－2 (1971). (to be published)
3)　E. Cartan, Les Espaces de Finsler. Hermann, Paris, 1934.
4)　H. Rund, The Differential Geometry of Finsler Space. Springer, 1959.
5)　F. C. Frank, Disc. Faraday Soc., <u>25</u> (1958), 19.
6)　C. W. Oseen, Trans. Faraday Soc., <u>29</u> (1933), 883.
7)　Y. Muto, Proc. Phy.-Math. Soc. Japan, <u>20</u> (1938), 451.
8)　池田　恵，物性研究，<u>14</u>－3 (1970)，203．